היחידה למתמטיקה. סמסטר ב' תשפ"ב. מקצוע: חדו"א 2. מרצה: שי סרוסי

10:10-11:40 12.5.22

חדו"א 2 להנדסת תוכנה

<u>משך הבוחן</u> – שעה וחצי

<u>חומר עזר</u> – מחשבון רגיל, דף נוסחאות של הקורס (מצורף).

<u>הוראות מיוחדות</u> – הבוחן מורכב מ-3 שאלות. עליכם לפתור את כולן (בשאלה 3 יש בחירה פנימית).

הבוחן מכיל 4 עמודים (כולל דפי נוסחאות ודף זה). יש לכתוב בכתב יד ברור ומסודר ולפרט כל שלב בחישובים.

יש לרשום ליד כל תשובה את מספר השאלה, ומספר הסעיף, במידה וישנו. הסבירו היטב את תשובותיכם. תשובות ללא הסבר לא יתקבלו.

ניתן להגיש ערעור/בקשות שונות לגבי הבוחן במשך 7 ימים בלבד מיום קבלת הציון.

בהצלחה!

היחידה למתמטיקה. סמסטר ב' תשפ"ב. מקצוע: חדו"א 2. מרצה: שי סרוסי

שאלה מס' 1. (35 נקודות)

1. (30 נק') מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}(3x+1)^n$.

2. (5 נק') תנו דוגמה לטור חזקות המתכנס בקטע $(2,8]$ ומתבדר מחוץ לקטע.

שאלה מס' 2. (35 נקודות)

1. (30 נק') מצאו את משוואת המישור המכיל את הישר $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+5}{-3}$ ומקביל לישר $\begin{cases}2x+4y+6z-5=0\\3x+2y-5z+4=0\end{cases}$.

2. (5 נק') הוכיחו: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^2-1}{e^2}\right)^n$.

שאלה מס' 3. (30 נקודות) יש לענות על סעיף אחד בלבד!

1. על הישר העובר דרך הנקודות $A(2,0,6),B(0,1,6)$, מצאו את הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים.

2. מצאו את המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x,y,z) שמרחקן מהמישור $2x-z=0$ שווה למרחקן מהמישור $x-2y=0$.
אפיינו את אוסף הנקודות שקיבלתם.

בהצלחה!

פתרון

שאלה מס' 1

1. נסמן $t=3x+1$ ונחקור את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}t^n$. למציאת רדיוס התכנסות

נשתמש בנוסחת קושי: $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}}}=\frac{1}{\frac{3}{7}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^4+2n+7}}{\sqrt[n]{n^5}}}=\frac{7}{3}$.

לכן, לכל $-\frac{7}{3}<t<\frac{7}{3}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}t^n$ מתכנס בהחלט ולכל $t>\frac{7}{3}$ או $t<-\frac{7}{3}$ הטור מתבדר. לכן, לכל $-\frac{7}{3}<3x+1<\frac{7}{3}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}(3x+1)^n$ מתכנס בהחלט. כלומר, לכל $-\frac{10}{9}<x<\frac{4}{9}$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}(3x+1)^n$ מתכנס בהחלט ולכל $x>\frac{4}{9}$ או $x<-\frac{10}{9}$ הטור מתבדר.

נותר לבדוק התנהגות בקצוות.

עבור $x=\frac{4}{9}$ נקבל

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}\left(3\cdot\frac{4}{9}+1\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}\frac{7^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+2n+7}{n^5}$. נשווה טור זה

עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$:

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+2n+7}{n^5}:\frac{1}{n}=1$ ולכן הטור הנתון מתבדר יחד עם $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

עבור $x=-\frac{10}{9}$ נקבל

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}\left(3\cdot\frac{-10}{9}+1\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^4+2n+7)}{7^n n^5}(-1)^n\frac{7^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4+2n+7}{n^5}$,

הטור מתכנס (בתנאי) לפי מבחן לייבניץ.

לסיכום: הטור מתכנס עבור $-\frac{10}{9}\le x<\frac{4}{9}$.

2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}(x-5)^n$ מקיים הדרוש.

הסבר:

נסמן $t=x-5$ ונחקור את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}t^n$. למציאת רדיוס התכנסות נשתמש

בנוסחת קושי: $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{3^n n}\right|}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{3^n n}\right|}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$.

לכן, לכל $-3<t<3$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}t^n$ מתכנס בהחלט ולכל $t>3$ או $t<-3$ הטור מתבדר. לכן, לכל $-3<x-5<3$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}(x-5)^n$ מתכנס בהחלט. כלומר, לכל $2<x<8$ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}(x-5)^n$ מתכנס בהחלט ולכל $x>8$ או $x<2$ הטור מתבדר.

נותר לבדוק התנהגות בקצוות.

עבור $x=2$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}(x-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}(-3)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ וטור זה מתבדר.

עבור $x=8$ נקבל $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}(x-5)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n}3^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, הטור מתכנס (בתנאי) לפי מבחן לייבניץ.

לסיכום: הטור מתכנס עבור $2<x\le 8$.

שאלה מס' 2

1. למציאת וקטור כיוון של הישר $\begin{cases} 2x+4y+6z-5=0 \\ 3x+2y-5z+4=0 \end{cases}$

נסמן $\overrightarrow{N_1}=(1,2,3), \overrightarrow{N_2}=(3,2,-5)$, (ה)נורמלים של המישורים. נחשב את המכפלה הוקטורית,

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = (-32,28,-8) \parallel (8,-7,2)$ וקיבלנו וקטור כיוון של הישר.

הצגה פרמטרית של הישר $\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}$ היא $(1,5,-1)+t(3,2,-3)$.

נורמל המישור המבוקש מאונך לוקטור הכיוון של שני הישרים ולכן

$\overrightarrow{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (17,30,37)$. המישור מכיל את הנקודה $(1,5,-1)$ ולכן משוואתו

היא $17(x-3)+30(y-4)+37(z+5)=0$.

2. כידוע,

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\ldots \qquad |x|<1$$

מהנוסחה הראשונה נקבל שצד שמאל הינו e^2.

נשים לב ש- $\left|\frac{e^2-1}{e^2}\right|<1$ ולכן מהנוסחה השניה נקבל שצד ימין הינו $\frac{1}{1-\frac{e^2-1}{e^2}}$,

כלומר e^2.

שאלה מס' 3. סעיף ראשון:

ווקטור הכיוון של הישר AB הוא: $\overrightarrow{AB}(-2,1,0)$. אז הצגה פרמטרית של הקו הישר היא:
$x=-2t,\ \ y=1+t,\ \ z=6$ או $P(t)=(-2t,1+t,6)$. מכאן ניתן להמשיך את הפתרון בדרכים שונות :

דרך 1.

נרכיב את משוואת המישור אשר עבור דרך ראשית הצירים במאונך לישר AB:

$$-2x+y=0 \Leftarrow -2(x-0)+(y-0)+0\cdot(z-0)=0$$

ונמצא את נקודת החיתוך של הישר $P(t)=(-2t,1+t,6)$, $-\infty<t<\infty$ עם המישור הזה:

$$P\left(t=\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{2}{5},\ \frac{4}{5},6\right) \Leftarrow t=-\frac{1}{5} \Leftarrow -2(-2t)+(1+t)=0$$

דרך 2.

נרשום מרחק של נקודה שרירותית של הישר $P(t)=(-2t,1+t,6)$ מראשית הצירים כפונקציה של t:

$$d(t)=\sqrt{(-2t)^2+(1+t)^2+6^2}=\sqrt{5t^2+2t+37}$$

ונחשב מינימום של פונקציה זו

$$d(t)==\sqrt{5t^2+2t+37}=$$
$$=\sqrt{5}\sqrt{t^2+\frac{2}{5}t+\frac{37}{5}}=\sqrt{5}\sqrt{\left(t+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{25}+\frac{37}{5}}=$$
$$=\sqrt{5}\sqrt{\left(t+\frac{1}{5}\right)^2+7.36}$$

מכאן רואים כי:

$$\min_{x\in R} d(t)=d\left(-\frac{1}{5}\right)=\sqrt{5}\sqrt{7.36}=\sqrt{36.8}\approx 6.07.$$

דרך 3.

אם P נקודה של הישר הקרובה ביותר לראשית הצירים אז וקטור $\overline{OP}$ צריך להיות מאונך לווקטור $\overline{AB}(-2,1,0)$ ובכך $\overline{OP}\cdot\overline{AB}=0$. מכאן נקבל:

$$\overline{OP(t)}\cdot\overline{AB}=0 \Leftrightarrow (-2t,1+t,6)(-2,1,0)=0 \Leftrightarrow 4t+1+t=0 \Rightarrow t=-0.2$$

תשובה: נקודה של הישר AB הקרובה ביותר לראשית הצירים היא: $P(0.4,0.8,6)$.

<u>שאלה מס' 3</u>. <u>סעיף שני:</u>

נשווה מרחקים של נקודה שרירותית במרחב $P(x,y,z)$ משני המישורים הנתונים:

$$\frac{|x-2y|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x-z|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |x-2y|=|2x-2z| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=2x-z \Leftrightarrow x+2y-z=0 \\ x-2y=-2x+z \Leftrightarrow 3x-2y-z=0 \end{array}\right.$$

$$\bar{n}_1=(1,2,-1);\bar{n}_2=(3,-2,-1);\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2=(1,2,-1)\cdot(3,-2,-1)=3-4+1=0\Rightarrow \bar{n}_1\perp\bar{n}_2$$

קיבלנו שני מישורים המאונכים זה לזה.